ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ότι M^m είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Μια κ-κατανομή $\mathcal{D}$ στο M^m είναι μια απεικόνιση, η οποία σε κάθε $p \in M^m$ αντιστοιχεί έναν κ-διάστατο υπόχωρο $\mathcal{D}(p) \subseteq T_pM^m$, δηλαδή $M^m \ni p \to \mathcal{D}(p) \subseteq T_pM^m$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η κατανομή $\mathcal{D}$ λέγεται λεία ή διαφορίσιμη, όταν υπάρχουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $X_1, \dots, X_k$ στο $U \subseteq M^m$, ούτως ώστε $\forall q \in U$ τα $X_1|_q, \dots, X_k|_q$ να αποτελούν βάση του $\mathcal{D}(p)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ότι $\mathcal{D}$ είναι μια κ-κατανομή σε ένα πολύπτυγμα M^m. Ένα υποπολύπτυγμα $\Sigma^k \subseteq M^m$ λέγεται ολοκληρωτικό υποπολύπτυγμα για το $\mathcal{D}$ αν $\forall$ σημείο $p \in \Sigma^k$, ισχύει ότι $T_p\Sigma^k = \mathcal{D}(p)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λέμε ότι η κ-κατανομή $\mathcal{D}$ είναι ολοκληρώσιμη αν $\forall p \in M^m$ $\exists$ ολοκληρωτικό υποπολύπτυγμα Σ^k της $\mathcal{D}$

Θεώρημα Frobenius

Έστω ότι η $\mathcal{D}$ είναι μια διαφορίσιμη κ-κατανομή σε πολλαπλότητα M. Τότε η $\mathcal{D}$ είναι ολοκληρώσιμη αν-ν $\forall\ X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{D}$

Παρατήρηση

Αρκεί να ελέγξουμε τη συνθήκη $[X,Y] \in \mathcal{D} \Rightarrow$ $[X,Y] \in \mathcal{D}$ μόνο σε βάση διαν. πεδίων της $\mathcal{D}$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την κατανομή $\mathcal{D}$ του $\mathbb{R}^3$ που δίνεται ως

$$\mathcal{D} = \text{span}\left\{ X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

Σημειώνω ότι $\frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = (0,0,1)$$

Υπολογίζουμε

$$[X_1, X_2] = \left[\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\right] =$$

$$\cancelto{0}{\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right]} + \left[y\frac{\partial}{\partial z}, 1\frac{\partial}{\partial y}\right] =$$

$$y\cancelto{0}{\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\right]} - \frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{\partial}{\partial z} + y\cancelto{0}{\left(\frac{\partial}{\partial z}1\right)}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

Παρατηρούμε και δω ότι $-\frac{\partial}{\partial z} = -(0,0,1) \notin \mathcal{D}$, άρα δεν ολοκληρώσιμη κατανομή στο $\mathcal{D}$

Παράδειγμα

Θεωρούμε την κατανομή $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z}\}$

Αν υπολογίσουμε το γινόμενο Lie $[X_1, X_2]$

Έχουμε $[X_1, X_2] = [x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}] =$

$$[x\frac{\partial}{\partial y}, 1\frac{\partial}{\partial z}] - [y\frac{\partial}{\partial x}, 1\frac{\partial}{\partial z}] =$$

$$x\underbrace{[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]}_{0} + x\underbrace{(\frac{\partial}{\partial y}1)}_{0}\frac{\partial}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x)}_{0}\frac{\partial}{\partial y} -$$

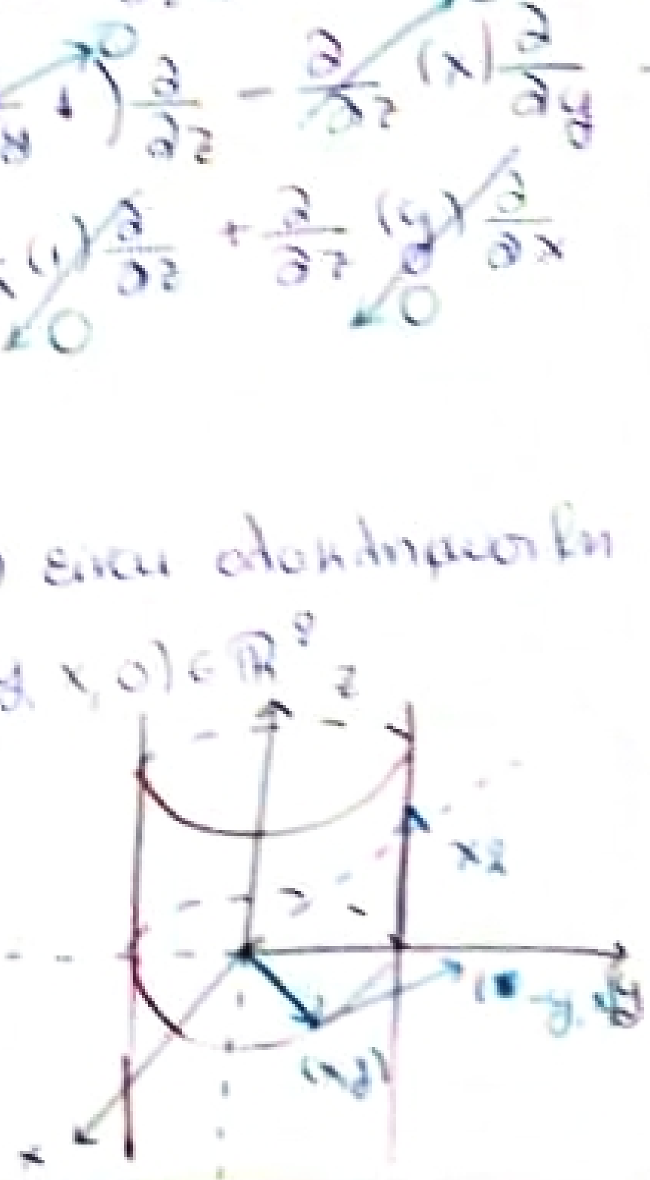
$$y\underbrace{[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}]}_{0} - y\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(1)}_{0}\frac{\partial}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(y)}_{0}\frac{\partial}{\partial x}$$

Άρα $[X_1, X_2] = 0 \in \mathcal{D}$

Επομένως η κατανομή είναι ολοκληρώσιμη

$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = (-y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$

$X_2 = \frac{\partial}{\partial z}(0,0,1)$



Παράδειγμα

Ας φιξάρουμε ένα στοιχείο $j \in S^2$ και να θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $X_p = j \times p$

Θέλουμε να βρούμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του X. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $j=(0,0,1)$

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Επειδή $\langle j \times p, p \rangle = 0$, το διάνυσμα $j \times p$ είναι εφαπτόμενο της σφαίρας στο σημείο p. Ας υπολογίσουμε ακριβώς το X.
Υποθέτουμε ότι $p=(x,y,z) \in S^2$ και $j=(0,0,1)$

Τότε $X_p = j \times p = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0)$

Άρα, αναζητούμε καμπύλη $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ έτσι ώστε $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \iff$

$(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_3(t)) = (-\gamma_2(t), \gamma_1(t), 0) \iff$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = -\gamma_2(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) = \gamma_1(t) \\ \dot{\gamma}_3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1(t) = R\cos t \\ \gamma_2(t) = R\sin t \\ \gamma_3(t) = C \end{cases}$$

με $R^2 + C^2 = 1$.